

УДК 548.232.4

# ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА ФАЗОВОЙ ГРАНИЦЫ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПЕРЕОХЛАЖДЕННОГО РАСПЛАВА ЧАСТЬ 3. КОРРЕЛЯЦИЯ «КРИВИЗНА–СКОРОСТЬ» НА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНИИ РОСТА

**О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

**Ключевые слова:** переохлажденный расплав; рост кристалла; предвестник боковой ветви дендрита; неравновесный теплоперенос.

## **Введение**

Нестационарные свойства фронта кристаллизации в значительной степени обусловлены корреляцией между кривизной поверхности роста и скоростью ее перемещения. Этому вопросу и посвящена третья, заключительная часть выполненного нами цикла работ. Продолжим исследование [1], [2] пространственной структуры теплового поля на фазовой границе (ФГ) высокоскоростной кристаллизации однокомпонентного чистого переохлажденного расплава. Данная работа развивает наши результаты [3]–[5] и имеет целью изучить эволюционные свойства фазовой границы кристаллизации, обусловленные отчетливо выраженной нестационарностью скорости и кривизны вершины дендрита.

## **Нестационарная кривизна линии роста**

Рассмотрим ФГ (двумерную плоскую либо осесимметричную), обладающую нестационарной кривизной линии роста. Правую систему координат с осями  $s$ ,  $n$ ,  $b$  строим так же, как в задаче о ФГ стационарной формы [1]. Уравнение ФГ постулируем в следующем виде:

$$f \equiv x + A(t) - [B(y)]^{p(t)} = 0.$$

Эта априорная зависимость основана на экспериментальных сведениях [6] о существовании нестационарных (например, периодических по времени) возмущений скорости и кривизны линии роста. В плоском случае  $v = 0$ , и  $x$ ,  $y$  – прямоугольные декартовы координаты; в случае осевой симметрии  $v = 1$ , координата  $x$  соответствует оси симметрии,  $y$  – радиальная координата. Здесь  $B = B(y)$  – непрерывная функция;  $B(y) \geq 1$ ,  $\dot{B}(y) \equiv dB/dy \geq 0$  при  $y \geq 0$ , причем  $B(y = 0) = 1$ . Закон движения вершины дендрита ( $y = 0$ ):  $x_j(t, y = 0) \equiv x_0(t) = 1 - A(t)$ ,  $t \geq 0$ . Фазовая граница движется влево,  $dx_0/dt = -\dot{A}(t) < 0$ . Геометрические свойства ФГ представляются формулами:

$$G = |\text{grad} f|, \quad G = [1 + p^2 B^{2(p-1)} \dot{B}^2]^{1/2},$$

$$p = p(t) \geq 1; \quad \sin \beta = 1/G, \quad \cos \beta = B_1/G, \quad B_1 = pB^{p-1}\dot{B}.$$

Выбор криволинейных ортогональных осей на ФГ иллюстрируется рис. 1 из работы [1]. Алгоритм построения этих осей изложен в [1], [2] и дает следующие результаты:

$$\xi_3 = x + A - B^p, \quad h_3 = 1/G; \quad \xi_1 = x + A + \int \frac{dy}{B_1(y,t)}, \quad h_1 = B_1/G.$$

Здесь учтено, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_3} = -\frac{1}{B_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_3} = \frac{1}{G^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_1} = B_1 \frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \frac{B_1^2}{G^2}.$$

Очевидно, что выполнено равенство  $\text{grad} \xi_1 \cdot \text{grad} \xi_3 = 0$ . Фазовая граница  $x_j = B^p - A$  перемещается со скоростью  $N = (\dot{p}B^p \ln B - \dot{A})/G$  и обладает средней кривизной:

$$K = K_1 + K_2, \quad K_1 = \frac{B_2}{G^3}, \quad K_2 = \frac{vB_1}{yG}, \quad (1)$$

$$B_2 = B_2(y, t) = pB^{p-1}\ddot{B} + p(p-1)B^{p-2}\dot{B}^2.$$

В случае  $p(t) \equiv 1$  получаем ранее изученные зависимости для ФГ стационарной формы. Работаем с двумерными уравнениями теплопереноса:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{v}{y} q_2 = 0, \quad v = 0, 1;$$

$$q_1 + \gamma \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_2 + \gamma \frac{\partial q_2}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Все основные обозначения такие же, как в [1], [2]. Переход от аргументов  $(x, y, t)$  к  $(\xi_1, \xi_3, t)$  и далее к переменным  $(s, n, t)$  выполняем по формулам:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_3} = \frac{B_1}{G} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial n};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{B_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - B_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} = \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_1}{G} \frac{\partial}{\partial n};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \xi_{1t'} + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \xi_{3t'} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{B_1}{G} \xi_{1t'} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{G} \xi_{3t'} \frac{\partial}{\partial n}.$$

Здесь координаты  $s, n$  естественным образом связаны с касательным и нормальным к ФГ направлениями; приняты обозначения:  $t' = t$ ,  $\partial \xi_1 / \partial t = \xi_{1t'}$ ,  $\partial \xi_3 / \partial t = \xi_{3t'}$ . Еще нам потребуются функции  $q_n, q_s$  вместо  $q_1, q_2$ :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_s; \quad q_1 = q_n \sin \beta + q_s \cos \beta, \quad q_2 = -q_n \cos \beta + q_s \sin \beta,$$

а также выражения, определяющие нестационарность движения ФГ:

$$\xi_{1t} = \dot{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dy}{B_1(y, t)}, \quad \xi_{3t} = \dot{A} - \dot{p} B^p \ln B;$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{B_1}{G} \frac{\partial B_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_1}{\partial t} = \dot{p} \dot{B} B^{p-1} (1 + p \ln B), \quad \dot{p} = \frac{dp(t)}{dt}.$$

### Градиентные свойства температуры и теплового потока

Запишем уравнения для функций  $T$ ,  $q_n$ ,  $q_s$  аргументов  $s$ ,  $n$ ,  $t$ :

– уравнение энергии:

$$\left( \frac{c \xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial q_n}{\partial n} = \Pi_1,$$

$$\Pi_1 = \frac{v}{y} (q_n \cos \beta - q_s \sin \beta) - c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{c B_1}{G} \xi_{1t} \frac{\partial T}{\partial s} - q_s \frac{\partial}{\partial y} (\sin \beta) + q_n \frac{\partial}{\partial y} (\cos \beta) - \frac{\partial q_s}{\partial s};$$

– уравнение теплового потока вдоль оси  $OX$ :

$$\frac{\lambda}{G} \frac{\partial T}{\partial n} + \left( \gamma \sin \beta \frac{\xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial q_n}{\partial n} + \left( \gamma \cos \beta \frac{\xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial q_s}{\partial n} = \Pi_2,$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & -\frac{B_1}{G} \lambda \frac{\partial T}{\partial s} - \gamma \frac{B_1^2}{G^2} \xi_{1t} \frac{\partial q_s}{\partial s} - \gamma \cos \beta \frac{\partial q_s}{\partial t} - \gamma \frac{B_1}{G^2} \xi_{1t} \frac{\partial q_n}{\partial s} - \gamma \sin \beta \frac{\partial q_n}{\partial t} - \\ & - \gamma \left( q_n \frac{\partial \sin \beta}{\partial t} + q_s \frac{\partial \cos \beta}{\partial t} \right) - q_n \sin \beta - q_s \cos \beta; \end{aligned} \quad (2)$$

– уравнение теплового потока вдоль оси  $OY$ :

$$-\frac{\lambda B_1}{G} \frac{\partial T}{\partial n} - \left( \gamma \cos \beta \frac{\xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial q_n}{\partial n} + \left( \gamma \sin \beta \frac{\xi_{3t}}{G} \right) \frac{\partial q_s}{\partial n} = \Pi_3,$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & -\frac{\lambda}{G} \frac{\partial T}{\partial s} + \gamma \frac{B_1^2}{G^2} \xi_{1t} \frac{\partial q_n}{\partial s} - \gamma \frac{B_1}{G^2} \xi_{1t} \frac{\partial q_s}{\partial s} + \gamma \cos \beta \frac{\partial q_n}{\partial t} - \gamma \sin \beta \frac{\partial q_s}{\partial t} - \\ & - \gamma \left( q_s \frac{\partial \sin \beta}{\partial t} - q_n \frac{\partial \cos \beta}{\partial t} \right) + q_n \cos \beta - q_s \sin \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Данные три уравнения образуют по отношению к  $\partial T / \partial n$ ,  $\partial q_n / \partial n$ ,  $\partial q_s / \partial n$  систему линейных неоднородных уравнений. Определитель этой системы равен:

$$\Delta = \frac{\lambda \gamma \xi_{3t}}{G} (M^2 - 1), \quad M^2 = \frac{N^2}{w^2}, \quad N = -\frac{\xi_{3t}}{G}, \quad w^2 = \frac{\lambda}{c \gamma}. \quad (4)$$

Нормальные производные подсчитываем по формулам:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\Delta_1^I}{c \gamma G (N^2 - w^2)}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial n} = \frac{\Delta_2^I}{c \gamma G^2 (N^2 - w^2)}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial q_s}{\partial n} = \frac{\Pi_3 + B_1 \Pi_2}{\gamma \xi_{3t}}. \quad (7)$$

$$\Delta_1^1 = \Pi_1 \gamma \xi_{3t} + B_1 \Pi_3 - \Pi_2; \quad \Delta_2^1 = c \xi_{3t} (\Pi_2 - B_1 \Pi_3) - \lambda \Pi_1 G^2.$$

Теперь нам потребуются динамические условия совместности на ФГ:

$$q_{sj} \equiv q_j \cos(\beta_* - \beta_j) = q_* \cos \beta_*; \quad (8)$$

$$q_{nj} \equiv q_j \sin(\beta_* - \beta_j) = q_* \sin \beta_* + N(u_j - u_*) - L \left( N + \gamma \frac{\partial N}{\partial t} \right); \quad (9)$$

$$T_j = T_c - \frac{T_c U}{L} K - \frac{|N|}{\mu}; \quad q_j = |q_j|, \quad q_* = |q_*|; \quad U, \mu - \text{const}. \quad (10)$$

Здесь допускается случай одномерного нестационарного теплового поля расплава:  $q_* = q_*(x, t)$ ,  $T_* = T_*(x, t)$ . Наиболее простой случай такой:  $q_* \equiv 0$ ,  $T_* \equiv \text{const}$ . Для определенности анализируем вариант  $N = Nn$ ,  $q_* = q_* i_1$ , принимая  $N < 0$ ,  $q_* > 0$ . Ясно, что

$$T_j = T(\xi_1, \xi_3 = 0, t), \quad q_{nj} = q_n(\xi_1, \xi_3 = 0, t), \quad q_{sj} = q_s(\xi_1, \xi_3 = 0, t).$$

Поэтому

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j = \frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{\partial T_j}{\partial t'} + \xi_{1t} \cos \beta \frac{\partial T_j}{\partial s} \text{ и т. п.}$$

Итак, функции  $T_j$ ,  $q_{nj}$ ,  $q_{sj}$  определяем с помощью (8)–(10) через параметры расплава  $q_*$ ,  $T_*$ . Продифференцировав по касательной координате  $\partial/\partial s$  формулы (8)–(10), находим:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_j = \frac{\partial T_j}{\partial s}, \quad \left( \frac{\partial q_n}{\partial s} \right)_j = \frac{\partial q_{nj}}{\partial s}, \quad \left( \frac{\partial q_s}{\partial s} \right)_j = \frac{\partial q_{sj}}{\partial s}.$$

Для подсчета производных

$$\frac{\partial q_*}{\partial s}, \quad \frac{\partial T_*}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial s}(\cos \beta), \quad \frac{\partial}{\partial s}(\sin \beta)$$

применяем следующие операторы:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial}{\partial y} \sin \beta; \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \sin \beta - \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta.$$

Следовательно, нормальные производные на ФГ:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_j, \quad \left( \frac{\partial q_n}{\partial n} \right)_j, \quad \left( \frac{\partial q_s}{\partial n} \right)_j \quad (11)$$

подсчитываем на основе (8)–(10) и их дифференциальных следствий, получаемых воздействием операторов  $\partial/\partial n$  и  $\partial/\partial s$ .

### Обсуждение результатов

Математической моделью появления боковой ветви дендрита на ФГ служит градиентная катастрофа, с наступлением которой производные (11) становятся неограниченно большими. Анализ полученных выражений позволяет утверждать, что существуют три причины разрушения теплового поля на линии роста.

I. Из (5), (6) ясно, что разрушение происходит в «звуковой» точке  $(x_j^1, y^1, t^1)$ , когда  $N^2(y^1, t^1) = w_j^2$ ; здесь  $x_j^1 = x_j(y^1, t^1)$ .

II. Согласно (4), (7) градиентная катастрофа наступает в точке остановки  $(x_{jr}, y_r, t_r)$  ФГ, когда  $N(y_r, t_r) = 0$ , т. е.  $(\dot{p}B^p \ln B)_r = (\dot{A})_r$ .

Этот вариант возможен только при нестационарной кривизне ФГ, когда функция  $p(t)$  не является тождественной константой. В частном случае, когда  $p(t) \equiv \text{const}$ , кривизна стационарна ( $\partial K/\partial t \equiv 0$ , см. (1)), и градиентная катастрофа может появиться только в «звуковой» точке.

Отметим еще, что в кинематическом отношении  $\dot{A}(t)$  характеризует скорость, отвечающую поступательной компоненте движения ФГ;  $\dot{p}(t)$  характеризует угловую скорость касательной к ФГ в каждой ее точке. В физическом отношении  $\dot{A}(t)$  характеризует скорость движения вершины дендрита;  $p(t)$  определяет кривизну на вершине дендрита:  $K(y=0, t) = p(t)\ddot{B}(y=0)$ .

III. При подсчете производной  $(\partial q_n/\partial t)_j$  появляется  $\partial^2 N/\partial t^2$ , т. е. формулы (11) содержат производные третьего порядка:  $d^3 A(t)/dt^3$ ,  $d^3 p(t)/dt^3$ .

Градиентная катастрофа появляется, когда  $p(t)$  и (или)  $A(t)$  содержат входящую аддитивно степенную либо логарифмическую особенности:

$$(t_3 - t)^{3-\alpha}, \quad t_3 > 0, \quad 0 < \alpha < 1; \quad (t_3 - t)^3 \ln(t_3 - t), \quad t_3 > 0.$$

Из рассмотрения аналитических выражений (2) и (3) ясно, что локальная неравновесность проявляет себя не только по отношению к тепловому потоку (см. слагаемые, содержащие множители  $\gamma \partial q_n/\partial t$ ,  $\gamma \partial q_s/\partial t$ ), но и по отношению к углу  $\beta$ , характеризующему двумерные геометрические свойства ФГ (см. слагаемые, содержащие множители  $\gamma \partial \sin \beta/\partial t$ ,  $\gamma \partial \cos \beta/\partial t$ ). Таким образом, нормальные производные (5)–(7) содержат слагаемые вида  $\gamma \frac{\partial}{\partial t}(q_n \cos \beta)$ ,  $\gamma \frac{\partial}{\partial t}(q_s \cos \beta)$ , а это значит, что на фоне локальной неравновесности процесса роста наблюдается нелинейное (мультипликативное) взаимодействие тепловых и морфологических свойств ФГ.

Приведем здесь примеры расчета высокоскоростного затвердевания переохлажденного расплава никеля. Вычисления выполняем в безразмерных переменных. Берем следующие масштабы величин:  $c_b = c_* = c_j$ ,  $\lambda_b = \lambda_* = \lambda_j$ ,  $T_b = T_c$ ,  $y_b = 10^{-6}$  м,  $K_b = 10^6$  м,  $N_b = 3$  м/с,  $x_b = \lambda_b/(c_b N_b) = 4 \cdot 10^{-6}$  м,  $t_b = x_b/N_b = (4/3) \cdot 10^{-6}$  с,  $q_b = c_b T_b N_b$ ,  $L_b = L/(c_b T_b)$ ,  $\mu_b = N_b/T_b$ . Теплофизические свойства никеля:  $c = 5,62 \cdot 10^6$ , Дж/(м<sup>3</sup> · град);  $\lambda = 69$ , Вт/(м<sup>3</sup> · град);  $L = 2,14 \cdot 10^9$ , Дж/м<sup>3</sup>;  $T_c = 1728$ , °К;

$U = 1,81$ , Дж/м<sup>2</sup>;  $\mu \in [1544; 2594]$ , м/(с·град);  $\gamma = 1,38 \cdot 10^{-7}$ , с;  $T_* = 1562$ , °K;  $y_1 = 4 \cdot 10^{-6}$  м. Интервал числовых значений  $\mu$  указан на основе формул, полученных в [4]. Тепловое поле расплава создается источником  $q_v^*(x)$ :

$$q_* = -\lambda_* \frac{dT_*(x)}{dx}, \quad \frac{dq_*(x)}{dx} = q_v^*(x), \quad x \in [x_1, 0], \quad x_1 < 0.$$

Рассматриваем физически содержательный вариант незатухающего теплового потока:

$$q_*(x) = q_*^1 \sin^2(k_*x); \quad q_*^1, k_* - \text{const}, \quad q_*^1 > 0;$$

$$T_*(x) = T_*^0 - \left( \frac{q_*^1}{\lambda} \right) \left[ \frac{x}{2} - \frac{1}{4k_*} \sin(2k_*x) \right], \quad \frac{2\pi}{k_*} < (-x_1), \quad T_*(x=0) = T_*^0 > 0.$$

В частном случае  $q_*^1 = 0$ , т. е. при  $q_*(x) \equiv 0$  имеем однородное тепловое поле  $T_* = T_*^0 \equiv \text{const}$ ,  $x \in (-\infty, 0]$ . Кроме того, был рассмотрен затухающий по координате тепловой поток вида  $q_*(x) = q_*^1 e^{n_*x} \sin^2(k_*x)$ ;  $q_*^1, k_*, n_*$  – положительные величины. Сразу отметим, что результаты расчетов для  $n_* = 0$  и  $n_* > 0$  не содержат существенных качественных различий.

Порядок вычислений состоит в следующем. Указываем тип симметрии фазовой границы, т. е. фиксируем параметр  $\nu = 0; 1$ . Задаем  $c, \lambda, \gamma, U, L, \mu$  и тепловое состояние расплава  $q_*(x_j), T_*(x_j)$ , где  $x_j \equiv x_j(t) = -A + B^p$ . Зависимость  $B = B(y)$  определяет двумерные геометрические свойства линии роста  $x_j = x_j(y, t)$  на плоскости  $(x, y)$ . Далее, последовательно вычисляем  $B_1, B_2, G, K_1, K_2, \xi_{3t}, N, \xi_{1t}, h_1, h_3, x_j(y, t), q_*, T_*, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Delta_1^1, \Delta_2^1$ . Цель расчетов: найти  $T_j, q_n, q_s, \partial T_j / \partial n, \partial q_n / \partial n, \partial q_s / \partial n$  как функции аргументов  $y, t$ . Графики этих зависимостей строим при фиксированном  $y$  при  $t \geq 0$ . Здесь  $y = 0$  – вершина дендрита; чем больше поперечная / радиальная координата  $y$ , тем дальше находится изучаемая точка линии роста от оси дендрита. Вычисление производных выполнялось с помощью программы Mathcad.

Таким образом, мы решаем полуобратную задачу: задаем из физических соображений вид фазовой границы; указываем температурное поле расплава  $T_*(x), q_*(x)$  и вычисляем в твердой фазе  $T, q_n, q_s$ , а также их производные  $\partial / \partial n$  по нормали к линии роста. Данный подход позволяет найти: связь скорости  $N$  и кривизны  $K$ ; закономерности влияния колебаний функций  $A(t), p(t)$  на поведение теплового поля; условия появления неустойчивостей в системе «расплав–кристалл» под воздействием периодической неоднородности теплового потока  $q_*(x)$ .

Уравнение линии роста записываем в следующей форме:

$$x_j(y, t) = -A(t) + [B(y)]^{p(t)};$$

$$A(t) = 1 - N_0 t - A_1(t); \quad A_1(t=0) = 0; \quad B(y=0) = 1; \quad N_0 < 0.$$

При  $t = 0$  вершина дендрита находится в начале координат,  $x_j(y=0, t=0) = 0$ .

Вариант 1 содержит следующие функции:

$$B(y) = 1 + n_1 y; \quad (12)$$

$$A_1(t) = \frac{a_1}{\omega_1} (1 - \cos \omega_1 t), \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Это значит, что скорость ФГ испытывает периодическое возмущение  $a_1 \sin \omega_1 t$ . Для  $p(t)$  допускается два случая:

$$p(t) = 1 + (a_2 \sin \omega_2 t)^2; \quad (14)$$

$$p(t) = 1 + a_2 (1 - \sin \omega_2 t), \quad a_2 > 0. \quad (15)$$

Здесь  $a_1, a_2, n_1, \omega_1, \omega_2$  – постоянные величины. Для зависимости (14) имеем неотрицательное отклонение от единицы; зависимость (15) дает знакопеременное отклонение  $a_2 \sin \omega_2 t$  от  $1 + a_2$ . Функция (12) – линейная по координате  $y$ , поэтому далее для краткости называем семейство таких линий роста клиновидными.

Вариант 2 содержит функцию

$$B(y) = \exp(n_2 y), \quad n_2 > 0. \quad (16)$$

Далее называем такую форму ФГ экспоненциальной. Для этого варианта нестационарные свойства определяются функциями (13), (14). Зависимости (12) и (16) применяем в конечной окрестности вершины дендрита.

Обсудим результаты расчетов, полученные при  $v = 0$ ,  $-N_0 = 3,07$  м/с,  $\mu = 1600$  м/(с·град),  $k_* = 1$ ,  $T_*^0 = 0,962$ . Рис. 1–4 относятся к клиновидному варианту (12). Отметим нетривиальное свойство корреляции «кривизна–скорость»: вблизи вершины (рис. 1, а) зависимость  $|N| = N_m(K)$  двузначная; по мере удаления от вершины число ветвей функции  $N_m(K)$  удваивается, одно и то же значение кривизны наблюдается при четырех разных скоростях вершины (рис. 1, б).

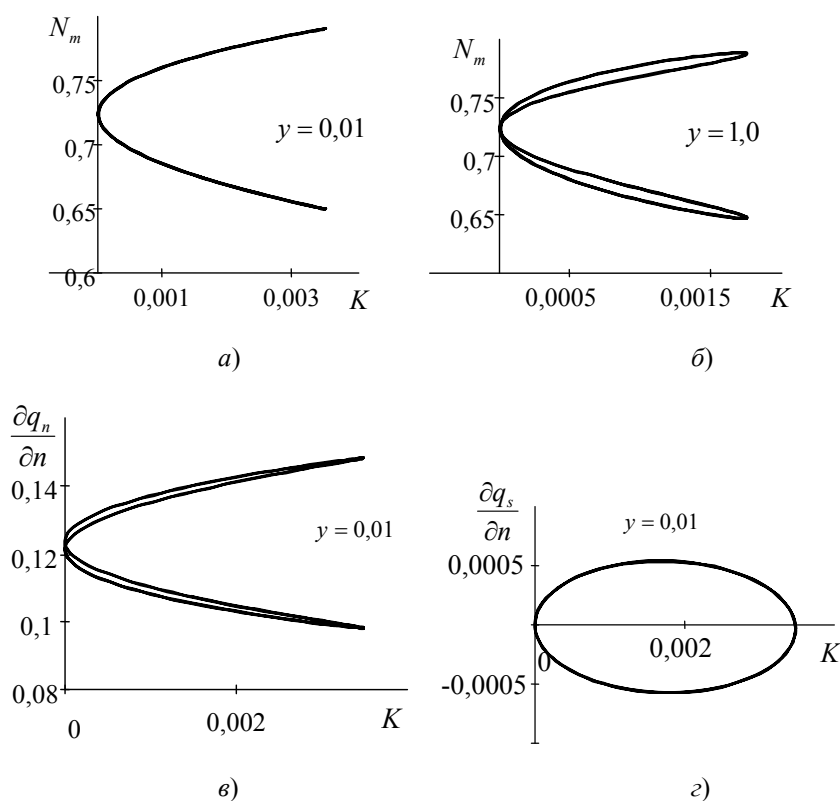


Рис. 1. Влияние кривизны вершины дендрита на теплообмен: а, б –  $q_*^1 = 0,5$ ; в, г –  $q_*^1 = 0$ .

Параметры линии роста:  $a_1 = 0,1$ ;  $a_2 = 0,1$ ;  $\omega_1 = 0,5$ ;  $\omega_2 = 0,5$ ;  $n_1 = 1,0$ ;  $n_* = 0$

На рис. 2 показаны типичные примеры колебаний на клиновидной ФГ при малых периодических возмущениях кривизны.

Информация, представленная на рис. 3–5, позволяет судить об интервалах, в которых меняются основные параметры теплового поля на линии роста. Расчеты показали, что характер колебаний функции  $p(t)$  не влияет принципиальным образом на свойства данной теплофизической системы. Меняются отдельные фрагменты фазовых портретов, но основные закономерности эволюции линии роста сохраняются. Рис. 5 содержит сведения о свойствах ФГ для экспоненциального варианта (16). Здесь нужно обратить внимание на конечное значение кривизны, значительно отличающееся от клиновидных вариантов на рис. 3 и 4.

Анализ проведенных серий расчетов (рис. 3–5) говорит о том, что внутри каждой серии фазовые портреты в различных трехмерных пространствах:  $(N_m, K, q_n)$ ,  $(N_m, K, \partial q_n / \partial n)$  и т. д. – имеют похожую друг на друга структуру. Визуально эти структуры воспринимаются следующим образом: на рис. 3 – кусок ленты, края которой соединены между собой; на рис. 4 – две цилиндрические поверхности, образующие «восьмерку»; на рис. 5 – волнистая пластинка, стоящая на ребре. Отметим также, что этот вывод справедлив и для фазовых портретов в пространствах  $(N_m, K, T_j)$  и  $(N_m, K, \partial T_j / \partial n)$  – здесь эти рисунки не приводятся.



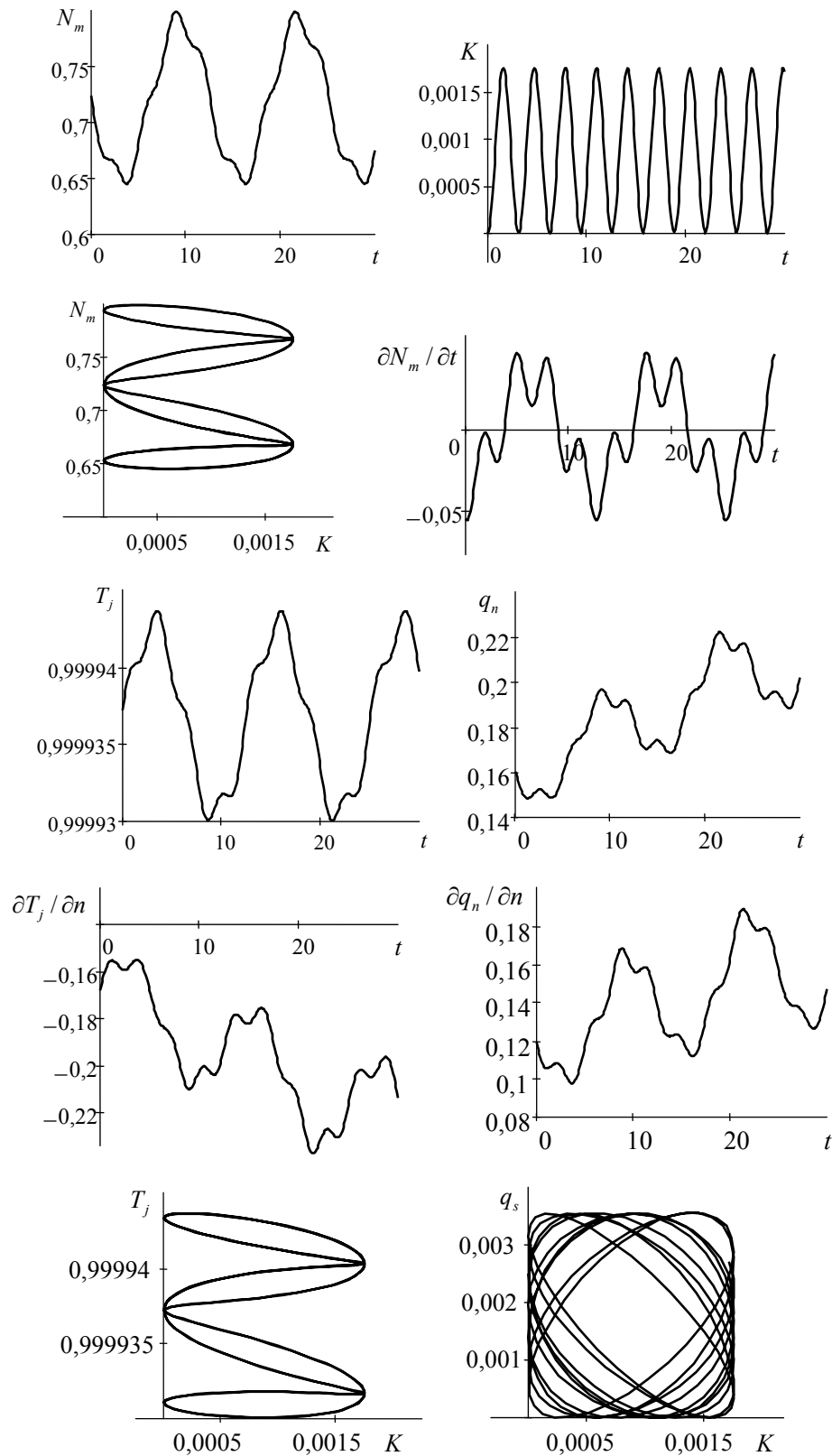


Рис. 2. Нестационарные свойства ФГ на конечном удалении от вершины дендрита:

$v = 0$ ,  $\mu = 20$  м/(с · град);  $n_* = 0$ ;  $n_1 = 1$ ;  $q_*^1 = 0,005$ ;  $\omega_1 = 0,5$ ;  $\omega_2 = 1$ ;  $y = 1$

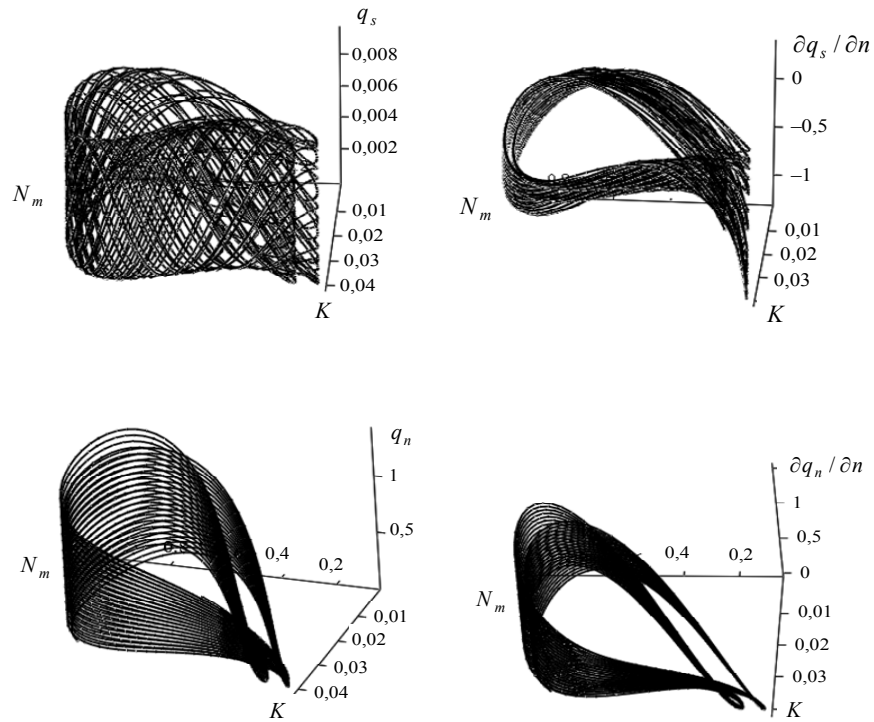


Рис. 3. Тепловые процессы на периферии дендрита ( $y = 1$ ) для режима колебаний (15);  
 клиновидная линия роста:  $v = 0$ ,  $\mu = 1600$  м/(с · град);  
 $n_* = 0$ ;  $n_1 = 1$ ;  $q_*^1 = 0,01$ ;  $\omega_1 = 0,5$ ;  $\omega_2 = 1$ ;  $a_1 = 0,1$ ;  $a_2 = 0,4$

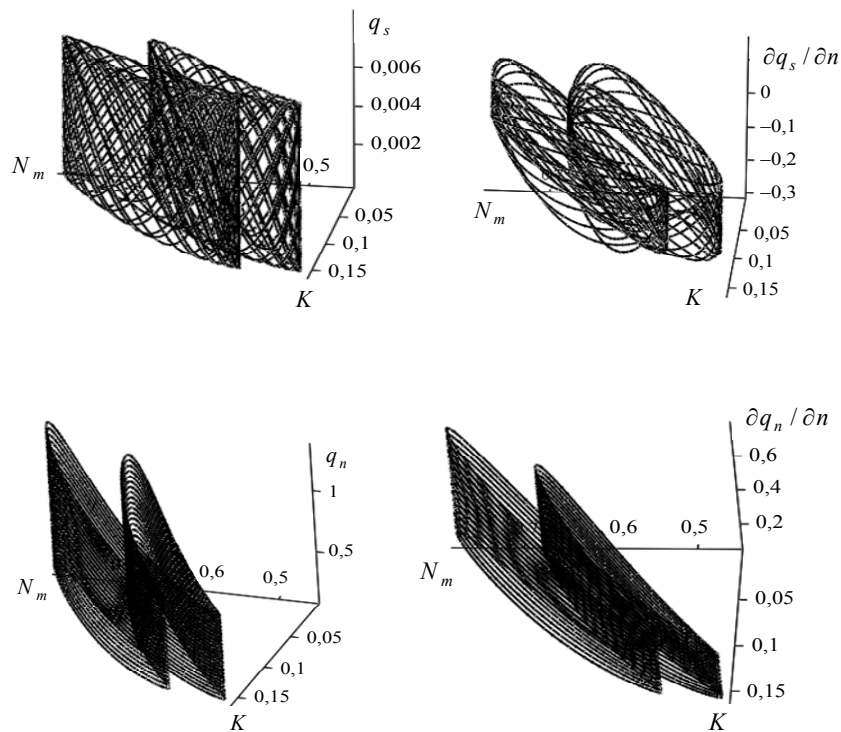


Рис. 4. Тепловые процессы в конечной окрестности вершины дендрита ( $y = 0,01$ )  
 для режима колебаний (15); клиновидная линия роста.  
 Входные параметры такие же, как на рис. 3

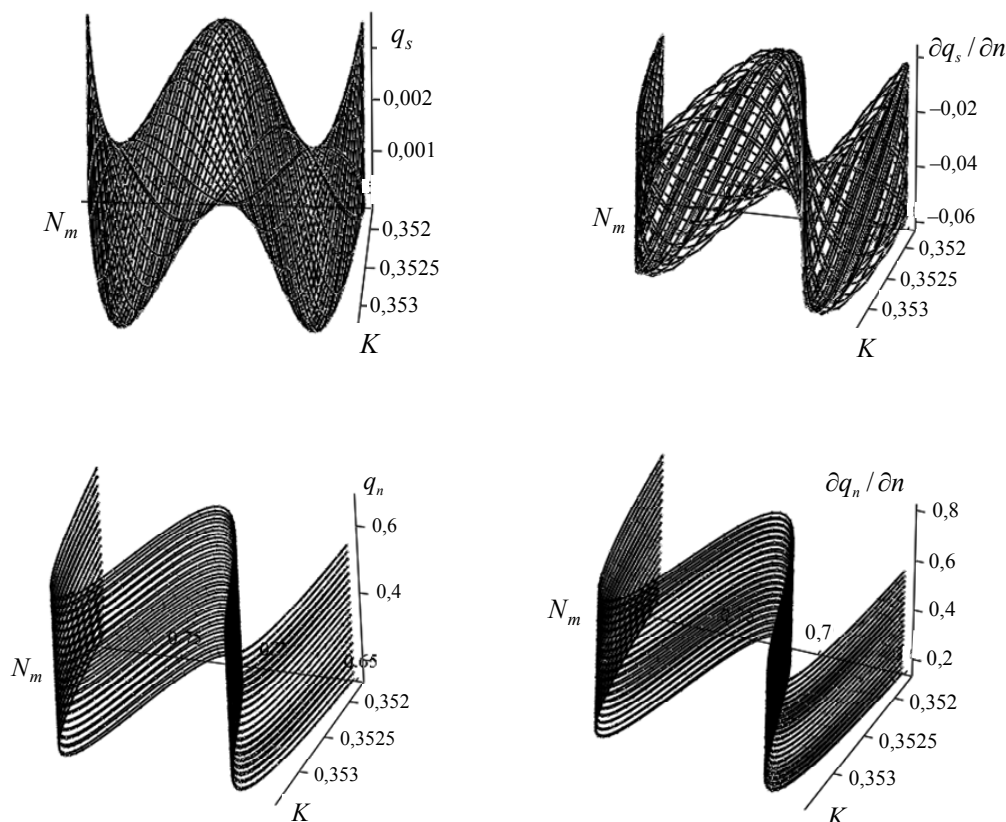


Рис. 5. Экспоненциальная форма (16) ФГ:  $\nu = 0$ ,  $\mu = 1600$  м/(с · град);  $n_* = 0$ ;  $n_1 = 1$ ;  $q_*^1 = 0,005$ ;  $\omega_1 = \omega_2 = 0,5$ ;  $y = 0,01$ . Фазовые портреты системы «расплав–кристалл» в конечной окрестности вершины дендрита для режима колебаний (14)

### Заключение

Получены аналитические выражения (5)–(7) для нормальных производных температуры и теплового потока на нестационарной ФГ. Предвестниками появления боковой ветви дендрита служат следующие условия разрушения теплового поля: появление «звуковой» точки; остановка ФГ; наличие особенности в ускорении второго порядка. Установлено, что на фоне локальной неравновесности процесса роста наблюдается нелинейное взаимодействие тепловых и морфологических свойств ФГ. Представлены результаты численных расчетов тепловых свойств двумерных линий роста, обладающих плоской и осевой симметриями. Анализ выполнен для случаев периодических по времени возмущений скорости и кривизны ФГ. Обнаружены существенные количественные различия между режимами колебаний вблизи вершины дендрита и на конечном удалении от нее. Показано, что основными параметрами влияния на тепловое состояние линии роста являются частота и фаза колебаний. Установлено, что система «расплав–кристалл» проявляет определенную стабильность по отношению к изменению режимов колебаний кривизны.

### Литература

1. Шабловский, О. Н. Локально-неравновесные свойства фазовой границы высокоскоростной кристаллизации переохлажденного расплава. Ч. 1. Трансзвуковой переход на линии роста / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2017. – № 2. – С. 71–79.

2. Шабловский, О. Н. Локально-неравновесные свойства фазовой границы высокоскоростной кристаллизации переохлажденного расплава. Часть 2. Формирование теплового потока на поверхности дендрита / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2017. – № 4. – С. 75–83.
3. Шабловский, О. Н. Тепловые свойства фронта кристаллизации однокомпонентного чистого переохлажденного расплава / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Расплавы. – 2005. – № 4. – С. 69–81.
4. Шабловский, О. Н. Расчет кинетических параметров фронта кристаллизации глубоко переохлажденного расплава / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Материалы, технологии, инструменты. – 2007. – Т. 12, № 1. – С. 5–10.
5. Шабловский, О. Н. Тепловая градиентная катастрофа и рост двумерного свободного дендрита в переохлажденном расплаве / О. Н. Шабловский // Приклад. физика. – 2007. – № 3. – С. 29–37.
6. Evidence for tip velocity oscillations in dendritic solidification / La Combe J. C. [et al.] // Phys. Rev. E : 2002. – Vol. 65, No. 3. – P. 031604-1–031604-6.

*Получено 24.01.2018 г.*